# Krise auf Krise

*Ein anspruchsvolles Randgebiet in der Mathematik, das den auffallenden Namen „Katastrophen-Theorie“ trägt, ist als neuer Schlüssel zum Verständnis vieler verwirrender Aspekte der Wirklichkeit begrüßt worden.*

Nur selten richtet sich das öffentliche Interesse auf ein Arbeitsgebiet der Mathematik. Noch weniger wird darüber im Fernsehen und in Zeitschriften berichtet. Eine Ausnahme macht jedoch eine neue mathematische Richtung, die in den siebziger Jahren im wesentlichen durch den französischen Mathematiker Ren Thom entwickelt worden ist. Er veröffentlichte 1972 sein epochemachendes Lehrbuch unter dem abschreckenden Titel *Strukturelle Stabilität und Morphogenese*. Das mathematische Gebiet, das er darin abhandelt, benannte er jedoch einprägsamer als „Katastrophen-Theorie“.

Zweifellos trug auch der Name zu dem großen öffentlichen Interesse bei, das sich nach einigen Jahren regte. Ein weiterer Faktor, der die Phantasie der Laien anreizte, war der ernsthafte Versuch namhafter Wissenschaftler, Thoms Theorie auf ein breites Spektrum dramatischer Themen anzuwenden, darunter auch solche, die man üblicherweise als Katastrophen bezeichnet: Erdbeben, das Versagen von Bauelementen unter Belastung, Nervenzusammenbrüche, plötzliche Kriegsausbrüche, sogar das Ausschwärmen der Wanderheuschrecken.

*Die Brücke von Tacoma Narrows brach im Jahre 1940 zusammen und stürzte in die Wasser des Puget Sound, Washington. Ein Sturm hatte stärkere Schwingungen ausgelöst, als das Bauwerk sie aushalten konnte. Materialversagen unter Belastung ist eines in der großen Anzahl der Anwendungsbereiche der Katastrophen-Theorie, die Ren Thom (unten) entwickelte.*

Mit Hilfe dieser neuen mathematischen Technik wurden auch zahlreiche andere Entwicklungen, physikalische, biologische und psychologische, analysiert, die zwar weniger katastrophal, aber ebenso abrupt, sprunghaft und unvorhersagbar sind: das jähe Umschlagen des Verhaltens bei Hunden vom Ducken zum Angriff, das spontane Umkippen der Wahrnehmung bei optischen Täuschungen, das „Aha-Erlebnis“ bei einem Witz, der plötzliche Zusammenbruch der Kampfmoral bei einer Truppe.

Das Interesse an der Katastrophen-Theorie wurde zusätzlich durch den Eifer ihrer akademischen Verfechter unterstützt. Diesen standen ebenso lautstarke Gegner gegenüber, welche die Ansprüche der Katastrophen-Theorie für weit übertrieben hielten. Die Spaltung des akademischen Lagers wurde durch den ungewohnten Charakter dieser neuen Mathematik verursacht. Viele erhofften sich von ihr Lösungsmöglichkeiten für Probleme, die die konventionelle Wissenschaft für unlösbar hielt, einschließlich der rätselhaften paranormalen Phänomene, deren Unvorhersagbarkeit und Sprunghaftigkeit den physikalischen Gesetzen zuwiderzulaufen scheint.

Die Mathematik, die den modernen Naturwissenschaften zugrundeliegt, entstand zu einer Zeit, in der man physikalische Vorgänge als gleichmäßige Veränderungen begriff. Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung durch Isaac Newton (1642–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) stellte eine wirksame und elegante Methode zur Verfügung, mit der sich die kleinsten Veränderungen im gleichmäßigen Umlauf der Planeten um die Sonne, im turbulenten, aber stetigen Fluß des Wassers und im Wachstum der Kristalle ausdrücken lassen.

Das System wurde während der nächsten Jahrhunderte verfeinert, aber nie zweifelte jemand daran, daß es sich um die grundlegend richtige Methode handelte, die physische Welt

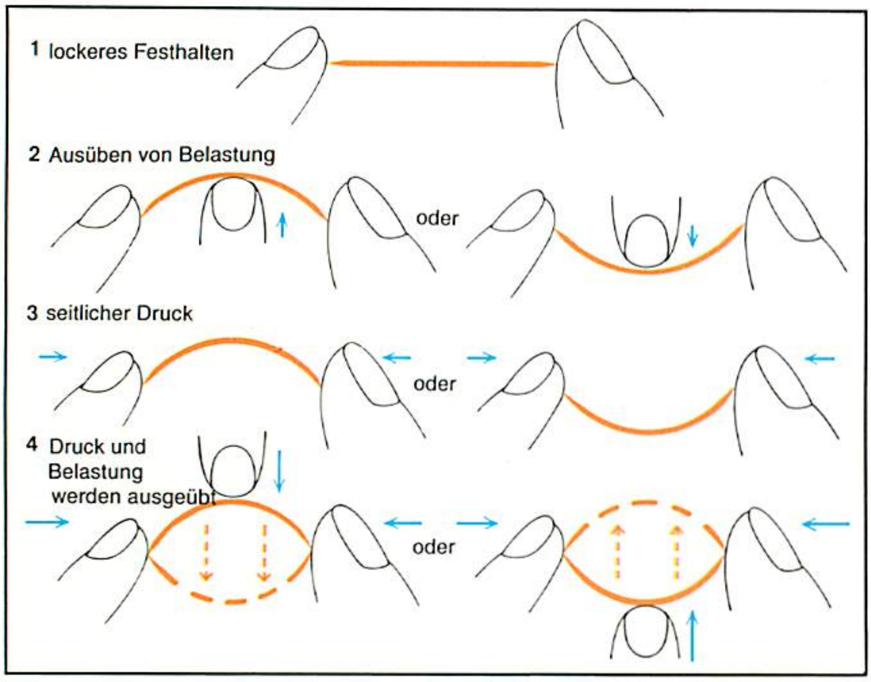
zu beschreiben. Zu gegebener Zeit würde die gesamte Physik, und schließlich alle anderen Wissenschaften, so präzise, geordnet und vorhersagbar sein, wie die Himmelsmechanik.

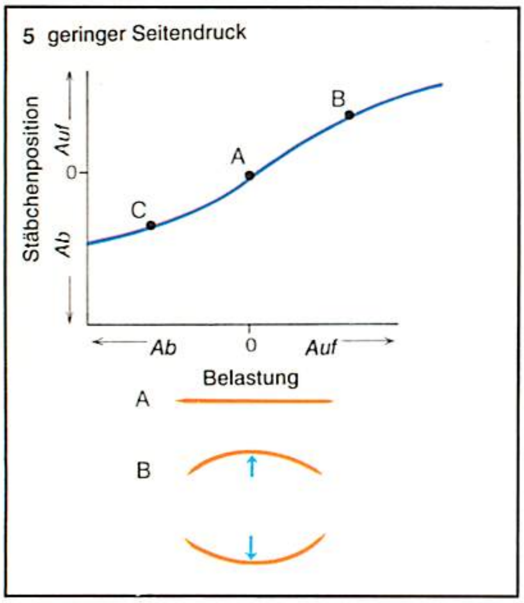
Eine für die Newtonsche Physik grundlegende Annahme widersprach jedoch der Alltagserfahrung. Ist es denn wahr, daß jede Veränderung kontinuierlich verläuft? Blasen platzen, Wasser erstarrt plötzlich zu Eis. Die Forschungen in diesem Jahrhundert haben gezeigt, daß Veränderungen auf der subatomaren Ebene häufig spontan und sprunghaft stattfinden: Elektronen wechseln übergangslos von einem Energieniveau zum anderen. Ist es wirklich sinnvoll, derartige Phänomene mit mathematischen Methoden anzugehen, die dafür geschaffen sind, gleichmäßige Entwicklungen auszudrücken?

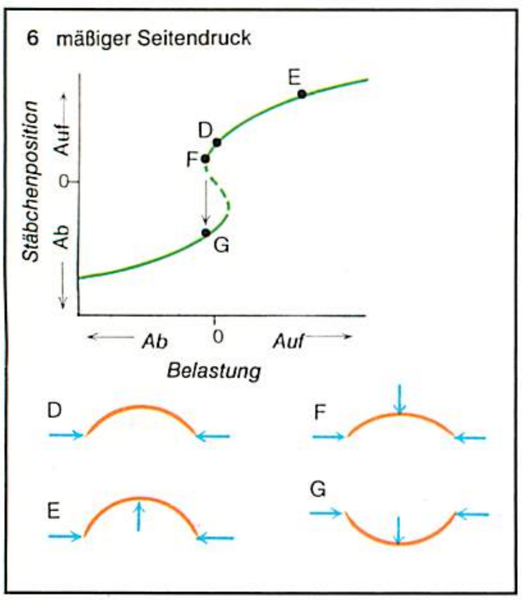
Ren Thom glaubt nicht daran, daß man abrupten Wechseln bei Vorgängen oder Gegenständen auf diese Weise gerecht werden könne. Eine Einsicht in die Vorgänge ist aber entscheidend für ein grundlegendes Verständnis der Welt. Ein angemessenes Ziel der Wissenschaft ist seiner Meinung nach die Beschreibung dessen, was er die „unaufhörliche Schöpfung, Entwicklung und Zerstörung von Formen im Universum" nennt.

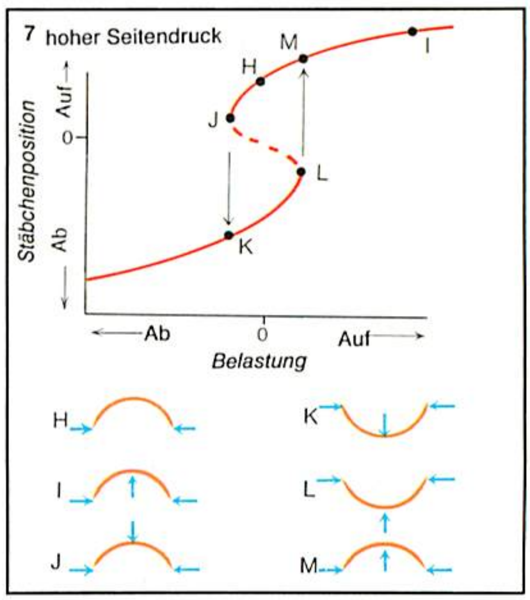
Gewöhnlich arbeiten Mathematiker mit langen Beweisketten und benutzen dabei viele Gleichungen. Das tut auch Thom, aber er setzt sie dazu ein, um zu zeigen, daß sich durch Bilder, mathematische zwar, aber immerhin Bilder, das Verhalten physikalischer Systeme darstellen läßt. Er vertritt die Auffassung, daß die Fähigkeit der bildhaften Vorstellung für unser Verständnis physikalischer Probleme entscheidend ist und daß bildhafte Erklärungen unserem Verständnis leichter zugänglich sind als Zahlen und Gleichungen. Christopher Zeeman, ein Hauptvertreter der Katastrophen-Theorie von der Warwick Universität, drückt es folgendermaßen aus:

„So wie unsere Hirne veranlagt sind, sind wir daran gewöhnt, gleichzeitig zu denken




*Ein Cocktail-Stäbchen aus Kunststoff veranschaulicht eine „Katastrophe", einen plötzlichen Sprung in einem Vorgang. Halten sie es locker (1), kann es unter Druck nach oben oder unten verschiedene Lagen einnehmen (2). Wird der Stab aber seitlich unter Druck gesetzt, läßt die Belastung ihn zwischen zwei Positionen hin- und herschnellen (3). Unter größerem Druck wird mehr Kraft gebraucht, um ihn zum Umspringen zu veranlassen (4). Die Kurve (5–7) faßt dies zusammen. Bei A wird das Stäbchen locker gehalten und überhaupt nicht belastet (5). Druck nach oben, biegt das Stäbchen leicht in Druckrichtung (B), Druck nach unten ebenfalls (C). Bei leichtem Druck von den Seiten (6), auch ohne Belastung von oben oder unten, ist der Stab leicht gebogen, nehmen wir einmal an, nach oben (D). Ein Druck nach oben verursacht eine leichte Zunahme der Wölbung (E). Ein Druck nach unten (in der Graphik eine Bewegung von D nach links) verändert die Form kaum, bis die Belastung so groß wird, daß (F) ein plötzlicher Sprung zum unteren Teil der Kurve (G) stattfindet. Ist der Stab noch stärkerem Druck entlang der Längsachse ausgesetzt (7), wird eine ebenfalls größere Belastung von oben erforderlich, um ihn zum Umspringen zu veranlassen (J–K). Das Stäbchen wiederum nach oben zu drücken, wird bis zum Erreichen des Punktes L keine Wirkung haben. Ähnliche Graphiken vermögen das Verhalten von belasteten Balken in Gebäuden zu beschreiben.*

und zu sehen. Deshalb ist es leicht möglich, sehr tief über eine neue Idee nachzusinnen, während man sich graphische Darstellungen einprägt. Das ist mit Zahlen anders; unser Gehirn ist nicht darauf eingerichtet, kreativ zu arbeiten und gleichzeitig zu rechnen."

Und Thom meint: „Das Dilemma, vor dem jede wissenschaftliche Erklärung steht, ist: Magie oder Geometrie." Eine Erklärung ohne Bild ist gar keine Erklärung.

Die Katastrophen-Theorie arbeitet qualitativ, nicht quantitativ. Beispielsweise kann sie keine Voraussage darüber machen, wann ein Ereignis eintreffen wird; aber sie kann uns sagen, welches Ereignis zu irgendeinem Zeitpunkt eintreten wird. In gewisser Hinsicht ist das eine Einschränkung, aber wir können uns auf dieser Basis immerhin Urteile bilden, Parallelen ziehen und wenigstens ungefähre Voraussagen treffen. Zur Veranschaulichung der Katastrophen-Theorie ist es nützlich, ein ganz einfaches Beispiel zu betrachten: Nehmen wir ein Cocktail-Stäbchen aus Plastik. Halten wir es locker zwischen Daumen und Zeigefinger der linken Hand. Nun drücken wir es mit dem Zeigefinger der anderen Hand leicht nach oben, es wird sich etwas verbiegen. Drücken wir stärker, wird es stärker nachgeben. Es kann durch entsprechenden Druck in jede Richtung gebogen werden.

## In bevorzugter Lage

Und nun üben Sie auch mit Daumen und Zeigefinger Druck aus. Das Stäbchen wird sich in eine bestimmte Richtung biegen – nehmen wir an nach oben. Wenn Sie jetzt mit dem anderen Zeigefinger das gleiche tun, wird es seine Form kaum verändern. Auch wenn Sie immer stärker drücken, wird das Stäbchen widerstehen, bis es ganz plötzlich in eine andere Lage umspringt und nun nach unten durchgebogen ist. Unter solchem Druck von den Enden her ist es unmöglich, das Stäbchen in eine mittlere Position zu bringen. Es hat zwei „bevorzugte Lagen", zwischen denen ein sprunghafter Wechsel stattfindet. Ohne diesen Druck dagegen kann ein Stab jede beliebige Zwischenposition einnehmen.

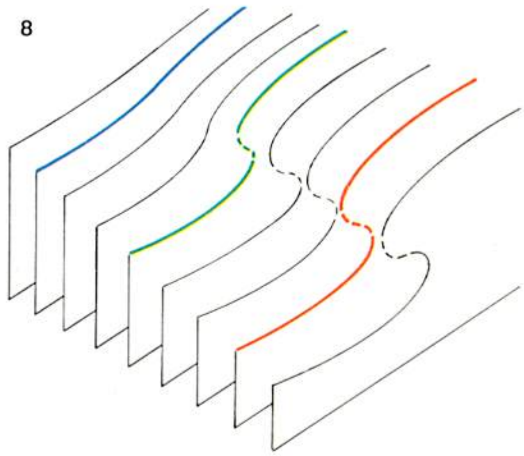
Das ist ein klassisches Beispiel für die Art der Vorgänge, mit denen sich die Katastrophen-Theorie beschäftigt. Beim Cocktail-Stäbchen handelt es sich um ein von zwei Faktoren bestimmtes System, nämlich dem von Daumen und Zeigefinger ausgeübten Druck und der mittels des anderen Zeigefingers bewirkten Belastung. Der Katastrophen-Theorie zufolge lassen sich alle möglichen Zustände eines Systems mit zwei Variablen, das plötzliche Sprünge („Katastrophen") in seinem Verhalten zeigt, durch ein graphisches Modell darstellen, das wie ein Blatt mit einer einzelnen einfachen Faltung aussieht. Ren Thom nennt diesen Fall „Scheitel-Katastrophe".

Wenn wir uns die Bewegung eines Punktes auf dem Blatt vorstellen, wird daran deutlich, inwiefern die Graphik das Systemverhalten bildlich übersetzen kann. Am Punkt *A* ist der Druck sehr schwach und die Belastung klein, der Stab ist kaum gebogen. Wird der Druck erhöht, ohne die Belastung zu ändern, geht Punkt *A* in Punkt *D* über. Er liegt höher an der Blattneigung, was eine größere Biegung unseres Cocktail-Stäbchens ausdrückt. Wird die Belastung jetzt bei gleichbleibendem Seitendruck erhöht, bewegt der Punkt sich zu *F*: es entsteht eine leichte Verminderung der Aufwärtsbiegung des Stabes. Eine weitere Vergrößerung der Belastung bewegt den Punkt über den Scheitel hinaus, und er springt auf die untere Blattebene zu *G*.

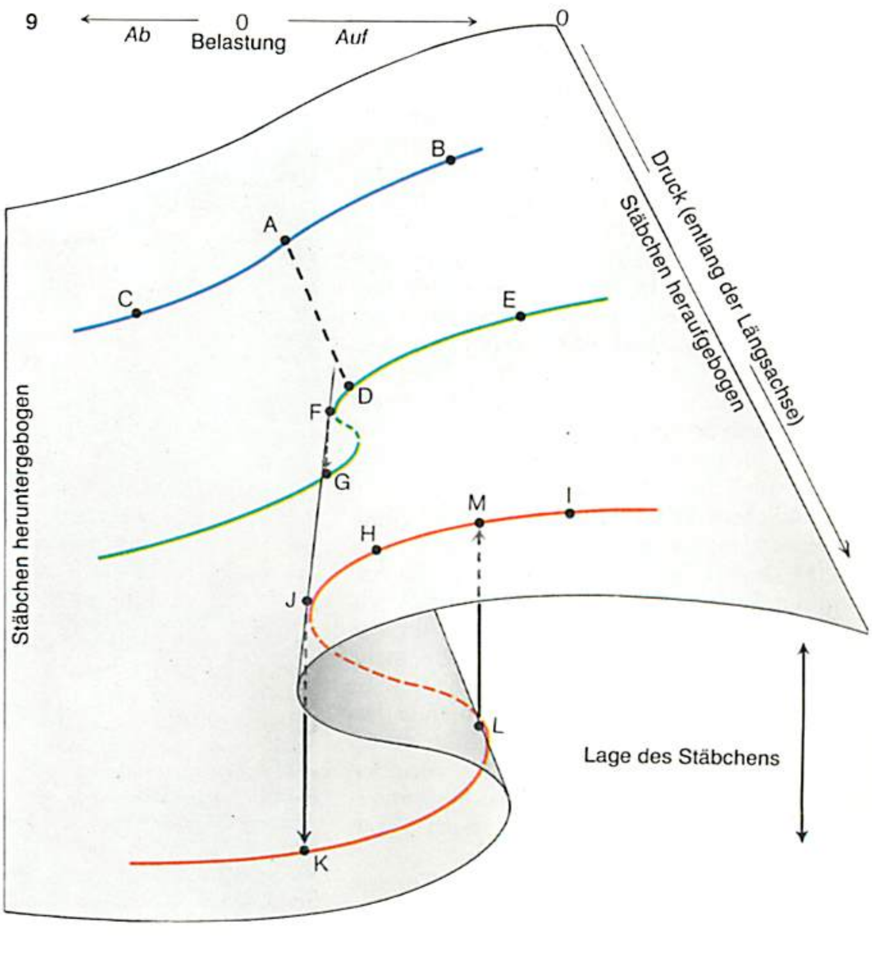
Das Verhalten eines Cocktail-Stäbchens ist an sich natürlich nicht von besonderem Inter-

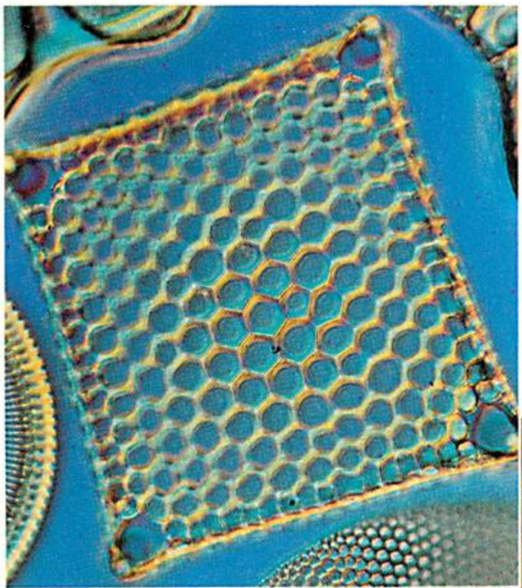
*Diese dreidimensionale Graphik läßt die einfachste „Scheitel-Katastrophe" verständlich werden, mit welcher eine große Anzahl physikalischer und biologischer Vorgänge beschrieben werden können. Sie besteht aus einer einmal gefalteten Ebene. Das Verhalten des Cocktail-Stäbchens kann aus den gegenüberliegenden Kurven (8) abgelesen werden. Jede gibt das Verhalten bei einer bestimmten Stärke seitlichen Drucks wieder. Hintereinander geschaltet ergeben sie die gefaltete Ebene (9). Wenn der Stab unterschiedlichen Belastungen bei ganz bestimmten Stärken des Seitendrucks ausgesetzt wird, erhält man die blaue, grüne und rote Kurve. Unter sehr geringem Druck (blau) tritt keine Katastrophe auf. Bei stärkerem (grün und rot) entstehen Sprünge im Verhalten (F–G und J–K). Für jeden Sprung gibt es einen entsprechenden Umkehrsprung, wie L–M.*

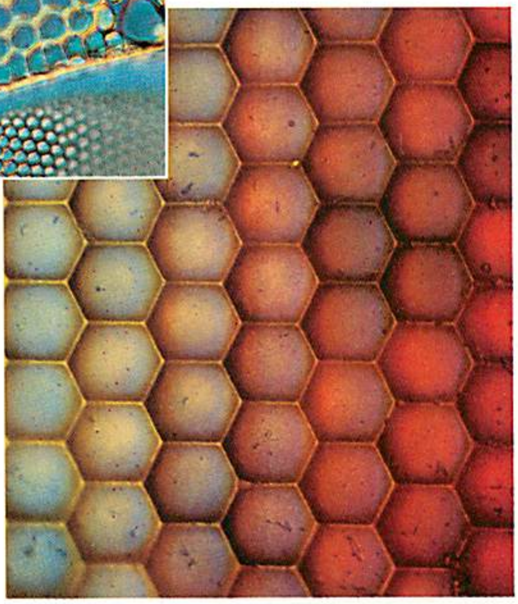
8



9





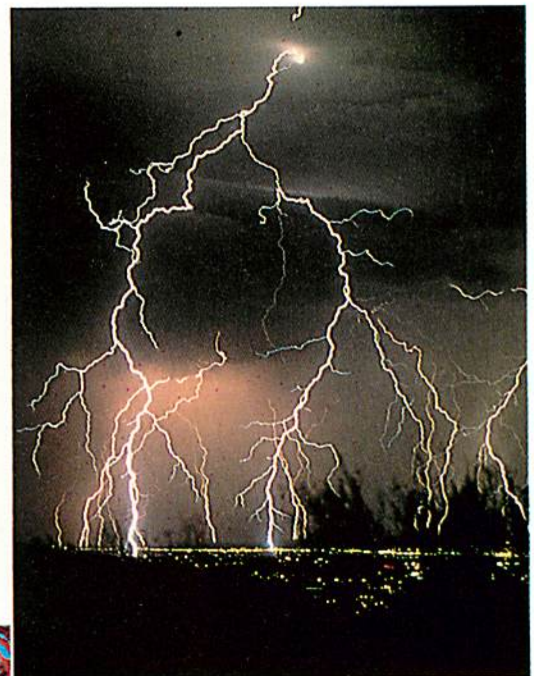


*Die Katastrophen-Theorie könnte unser Verständnis natürlicher Formen erweitern. Die traditionelle Geometrie weist dazu den Weg. Sechseckige Strukturen kommen beispielsweise häufig vor: bei Algen (oben) oder im Libellenauge (rechts). Das Sechseck ist eine der drei Flächenformen, die in regelmäßiger Wiederholung eine Fläche füllen können. Deshalb bildet es in der Natur eine „bevorzugte" Form.*

esse. Wichtig daran ist, jedes System mit „Katastrophen"-Verhalten, das von zwei Variablen bestimmt wird, kann durch eine entsprechende Graphik – das Blatt mit einer Faltung – beschrieben werden. Dies ist einer der grundlegenden Lehrsätze der Katastrophen-Theorie, das „Klassifikations-Theorem", welches Thom bereits 1965 formulierte. Die Falte kann größer oder kleiner sein, die Neigung steiler oder sanfter, aber die zugrunde liegende Form bleibt bestehen. Das qualitative Verhalten eines solchen Systems hängt nicht von der Art der Variablen, sondern nur von ihrer Anzahl ab. Ein System mit zwei Einflußfaktoren hat nur ein mögliches Entwicklungsmuster: den Sprung am Scheitelpunkt.

Komplexere Systeme, wie Tiere oder Menschenmengen, werden natürlich von erheblich mehr Faktoren beeinflußt. Wenn aber die Anzahl der Variablen 2 übersteigt, kommen wir in Schwierigkeiten, weil die Ebenen, die das Systemverhalten darstellen, in 4 oder mehr Dimensionen verlaufen und sich deshalb nicht auf einem Blatt Papier veranschaulichen lassen. Wir können uns aber ein Bild davon machen, indem wir Projektionen auf verschiedene Achsen durchführen, d.h. das Systemverhalten mit einem oder mehreren festen Variablenwerten in einer Ebene darstellen.

Vielleicht erweckt die Katastrophen-Theorie den Anschein, sie würde außerordentliche Behauptungen über die Natur und die Muster möglicher Ereignisse aufstellen. Um ihnen den richtigen Stellenwert zu geben, ist es sinnvoll, die grundlegenen Katastrophen der Natur mit den geometrischen Grundformen zu vergleichen. Schon die alten Griechen entdeckten, daß von allen zweidimensionalen regelmäßigen Polygonen (Flächen mit geraden, gleichlangen Begrenzungslinien) nur drei flächendeckend nebeneinander gelegt werden können: das Dreieck, das Quadrat und das Sechseck. Diese mathematische Tatsache hat weder mit dem Material der Formen, noch mit ihrer Größe zu tun. Die Griechen entdeckten auch,



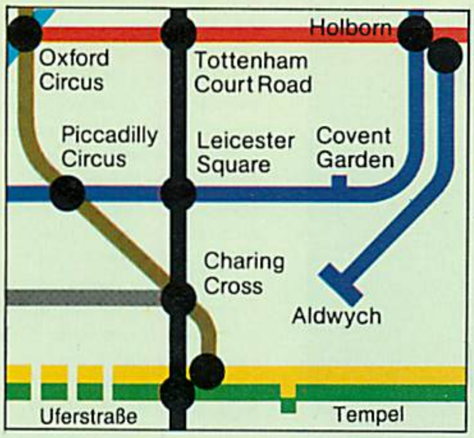
*Die verzweigten Formen eines Blitzschlages (oben) und eines Tangwedels (links) weisen deutliche Ähnlichkeiten zueinander auf, wie auch zu den Rissen in einer Wand, den Adern eines Blattes und den Seitenarmen in einem Flußdelta. Muster dieser Art, die qualitativ sehr ähnlich, aber nie genau gleich sind, lassen sich mathematisch nur sehr schwer erfassen. Die Katastrophen-Theorie verspricht Ordnung in derartige natürliche Formen zu bringen.*

Rechts:
*Die fünf „vollkommenen" Hohlkörper. Jeder von ihnen weist nach Gestalt und Größe identische Oberflächen auf.*

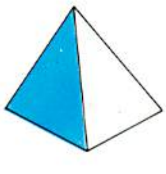
## Völlig unproportioniert

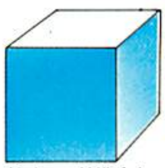
Die Katastrophen-Theorie ist eine Form der Topologie, welche in ihrer einfachsten Version auch als „Gummituch-Geometrie“ bezeichnet worden ist. Sie beschäftigt sich mit dem Verhältnis zwischen Punkten, Linien und Flächen, berücksichtigt aber die Frage der Größen, Längen, Flächen, Winkel, usw., nicht. Beispielsweise ist die Topologie daran interessiert, ob sich zwei Kreise schneiden, nicht aber an ihrer jeweiligen Größe. Geometrische Figuren, die auf ein Gummituch gezeichnet werden, können gequetscht und gedehnt werden, ohne daß sich eines der Verhältnisse verändert, für die sich Topologen interessieren. Sich schneidende Kreise können in ihrer Größe und Form beliebig variiert werden, in Ellipsen oder unregelmäßige Figuren, sie werden sich jedoch immer überschneiden.

Ein Topologe wird auch diese beiden Karten für gleichwertig halten. Die eine (rechts) ist maßstabsgetreu und gibt die wirkliche Lage einiger Londoner U-Bahn-Stationen wieder, sowie die dazwischen liegenden Streckenabschnitte, die in eine Luftfotografie der Stadt eingezeichnet wurden. Die andere (links) zeigt die Strecken begradigt und die Stationen in eine übersichtliche Ordnung gebracht. Reisende werden wie die Topologen diese Karte durchaus für zweckmäßig halten, denn sie zeigt ganz korrekt, welche Stationen an welchen Linien liegen, wo Kreuzungen sind usw. Die Katastrophen-Theorie geht auf ähnliche Weise qualitativ vor: Sie betrachtet nicht die Einzelheiten der Messungen, sondern verfolgt nur die Form der Falten in ihren Graphiken. Denn diese Formen beschreiben den jeweiligen Katastrophen-Typus.

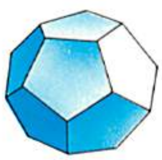




daß es nur 5 Körper gibt, deren Flächen von gleichartigen, regelmäßigen Polygonen gebildet werden: das Tetraeder (4 Flächen), der Würfel (6 Flächen), das Oktaeder (8 Flächen), das Dodekaeder (12 Flächen) und das Ikosaeder (20 Flächen). Daran ist nichts Mysteriöses; ein Körper, der von regelmäßigen Polygonen begrenzt wird, muß einfach einer von diesen sein.


Tetraeder


Kubus, Würfel


Oktaeder


Dodekaeder


Ikosaeder

### Die bevorzugten Formen

Es ist also kein Wunder, daß wir diese Formen in der Natur überall wiederfinden. Nicht, weil die Geometrie auf geheimnisvolle Weise die Natur beherrscht, sondern weil es einfach nicht anders möglich ist. Die Zellen der Bienenwaben haben darum aus dem gleichen Grund sechseckige Form wie die Anordnung auf einem Tablett voller Münzen, wenn es geschüttelt wird, bis alle Münzen eng nebeneinander liegen: Es ist die beste Ausnutzung des zur Verfügung stehenden Platzes. Thom ist der Auffassung, daß die in der Katastrophen-Theorie beschriebenen Elementarvorgänge analog dazu zu sehen sind. Sie müssen in der Natur überall auftreten, wie geometrische Formen.

Thom hat stets hervorgehoben, daß wissenschaftliche Theorien, die auf der Katastrophen-Mathematik fußen, im wesentlichen *qualitativer* Natur sein werden und nützlicher sind, um vorhandene Daten zu klassifizieren und neue Forschungsansätze anzuregen, als sie es gestatten würden, *quantitative* Vorhersagen zu machen, wie bei einigen wissenschaftlichen Theorien.

Doch waren andere von Anfang an bereit, weiter zu gehen. Führend unter diesen Vertretern einer erweiterten Katastrophen-Theorie war Christopher Zeeman: Wenn er die Theorie auf verschiedene biologische, soziale und psychologische Vorgänge anwandte, hoffte er das Interesse von Forschern zu gewinnen, die in diesen Bereichen bereits arbeiteten. Dadurch erkannte er der Katastrophen-Theorie aber eine voraussagende Funktion zu, wie denen der klassischen Newtonschen Wissenschaft.

In den Jahren 1975 und 1976 geriet die Katastrophen-Theorie plötzlich ins Rampenlicht. Vor allem durch eine Sendung der BBC-Fernsehreihe *Horizon*. Der *New Scientist* brachte einen Artikel und illustrierte die Titelseite mit den Worten KATASTROPHEN-THEORIE in großen, zerbrechenden Steinbuchstaben, als handele es sich um die Werbung für einen monumentalen Katastrophenfilm. Plötzlich war jeder daran interessiert: Die Katastrophen-Theorie kam in Mode.